



Investigando fractais no Ensino Básico

Uma proposta paradidática

Márcio Rostirolla Adames

Marcos Roberto Dalpiaz



Sumário

	Prefácio	5
1	Sobre o Surgimento do Conceito de Fractal	7
2	Introdução aos Fractais	9
3	Atividades com Fractais	15
3.1	A Curva de Koch	15
3.2	A Curva do Dragão	20
3.3	O Triângulo de Sierpinski	26
4	Dimensão Fractal	29
	Glossário	33
	Referências	35
	Posfácio	37

Prefácio

O propósito deste livreto é servir como guia para professores de matemática interessados em realizar uma intervenção pontual sobre o tema *fractais* com estudantes dos anos finais do ensino fundamental ou do ensino médio. O conteúdo não pretende ser uma exposição completa sobre o tema e deve ser visto como uma proposta de introdução investigativa aos fractais, que também pode servir como uma ferramenta auxiliar nos conceitos de dilatação e contração (homotetias), tamanho e dimensão, e processos iterativos.

Os conteúdos estão organizados em capítulos contendo: uma breve história dos fractais; uma introdução ao conceito de fractal através do exemplo do Conjunto de Cantor; uma sequência de atividades com três fractais (a Curva de Koch, a Curva do Dragão e o Triângulo de Sierpinski); e, por fim, uma breve discussão sobre o conceito de dimensão fractal. Além disso está incluso um pequeno glossário nas páginas 31 e 32.

Buscamos introduzir os conceitos por meio de exemplos do mundo real e experimentos práticos que podem ser realizados pelos estudantes ou com a participação deles. Para a realização desses experimentos, o livreto vem acompanhado de dois tipos de réguas, que são para gerar fractais, e por uma célula de Hele-Shaw (para mais detalhes veja o glossário no final do livreto).

O texto introduz as principais características dos fractais e alguns exemplos importantes, juntamente com motivações para o estudo deles, e foi organizado didaticamente da seguinte forma:

- As caixas azuis contêm definições ou descrições dos objetos estudados. Por exemplo:

O Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor é obtido, à partir de um segmento de reta, ao iterarmos infinitas vezes o seguinte processo:

1. Divide-se cada um dos segmentos de reta formados na iteração anterior em três segmentos de igual comprimento.
2. Apaga-se os segmentos abertos centrais obtidos no item 1.

- As caixas retangulares roxas contêm as propriedades dos fractais e algumas observações importantes. Por exemplo:

O comprimento dos segmentos cai pela metade a cada iteração

O comprimento de cada segmento cai pela metade pois cada segmento é dobrado (dividido) ao meio. Assim, novamente por indução, o comprimento dos segmentos é $l(1/2)^k$, onde l é o comprimento do segmento inicial.

- As partes do texto destacadas com uma barra lateral verde indicam as atividades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes e têm as respostas, para guiar o professor, escritas na cor azul. Por exemplo:

Atividade 1: Discussão sobre as propriedades do Conjunto de Cantor.

O objetivo desta atividade é identificar, juntamente com os estudantes, as principais propriedades do Conjunto de Cantor e as maiores dificuldades na sua construção. O professor pode ajudar os estudantes a chegar a algumas dessas propriedades através de questionamentos como:

- A cada iteração o comprimento do conjunto resultante aumenta ou diminui? O comprimento diminui. A cada iteração a soma dos comprimentos dos segmentos restantes é igual a $2/3$ da soma dos comprimentos dos segmentos que haviam na iteração anterior. Assim, se o segmento inicial tem comprimento 1, o comprimento após a n -ésima iteração será $(2/3)^n$, que tende a zero quando n vai para o infinito.
- O conjunto resultante será vazio? Não, pois alguns pontos, como os extremos de cada um dos segmentos retirados, permanecerão até o fim.
- É possível iterar o processo de construção infinitas vezes na prática? Não.
- Quais seriam as melhores medidas de segmento inicial para realizarmos algumas iterações com o auxílio de uma régua graduada? Aquelas medidas que são múltiplos ou potências de três.
- Quantas cópias do Conjunto de Cantor obtemos se triplicarmos (esticando) o comprimento do conjunto? Obtemos apenas duas cópias do Conjunto de Cantor, como ilustra a Figura 2.2

- O texto não destacado contém explicações e motivações que consideramos relevantes, dando contexto e motivação aos objetos e às propriedades introduzidas.

Apesar de apresentarmos um material de natureza principalmente paradidática, ou seja, para ser desenvolvido além dos conteúdos curriculares, a aplicação em sala durante as aulas de matemática pode ser feita e justificada no contexto:

- da Geometria Euclidiana, especialmente devido as homotetias;
- das Geometrias Não-Euclidianas, pelas formas fractais diferirem daquelas da geometria clássica;
- interdisciplinar, em conjunto com a Informática, por causa das aplicações iterativas usualmente utilizadas para definir os mais diversos fractais.

Indicamos ainda aos interessados a, primeiramente, praticarem as atividades e assegurar-se de que compreenderam as explicações e como aplicar as técnicas, evitando dessa forma que erros nos procedimentos de construção dos fractais gerem conclusões equivocadas sobre o tema nos estudantes. Além disso, entendemos que a compreensão das razões, pelas quais valem as propriedades destacadas, é fundamental. De modo que, apesar de não demonstrarmos formalmente a validade das diversas propriedades, as explicações que as justificam são um dos pontos centrais do texto e a discussão delas com os estudantes é muito importante.



1. Sobre o Surgimento do Conceito de Fractal

A matemática pode ser descrita como a ciência que estuda padrões. Padrões em formas, padrões em números, padrões em funções, dentre outros. Muitas inspirações e motivações para este estudo vêm da própria natureza e das alterações que fazemos nela.

Para compreendermos a natureza e construirmos a grande variedade de objetos e edificações que nos cercam, escolhemos, do ponto de vista histórico, objetos matemáticos simples e os aplicamos de diferentes formas. Começamos com números naturais, então vimos a necessidade de considerar os números inteiros, os racionais e os reais. Estudamos as formas através de segmentos de reta, círculos, parábolas, polígonos, poliedros, cilindros, esferas, . . . Utilizamos retas tangentes para estudar curvas, e planos tangentes para estudar superfícies. Nas diversas criações humanas, as figuras que aparecem em maior frequência são composições de figuras simples, formadas a partir de retas, círculos, triângulos, entre outras.

Contudo diversos objetos matemáticos surgiram ao longo do desenvolvimento da matemática que não podiam ser estudados em termos das figuras geométricas clássicas ou de funções elementares. Entre eles citamos¹:

- A Função de Weierstraß, publicada em 1875 em um artigo do matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, foi o primeiro exemplo de uma função contínua que não admite reta tangente (não é diferenciável) em nenhum ponto. A função foi descrita em termos de uma soma infinita.
- O Conjunto de Cantor, introduzido pelo matemático alemão Georg Cantor em um artigo publicado em 1883, é um subconjunto do segmento $[0, 1]$ que é infinito e não enumerável, mas tem comprimento zero e não contém nenhum segmento inteiro.
- A Curva de Koch, publicada em 1906 em um artigo do matemático Suéco Helge von Koch, foi a primeira curva construída a partir de procedimentos elementares da geometria sem apresentar tangente em nenhum ponto.

O matemático italiano Ernesto Cesàro ressaltou, em um trabalho de 1905, a importante propriedade da auto similaridade da Curva de Koch. Em 1938 o matemático Francês Paul Pierre Lévy construiu diversas curvas e superfícies com essa propriedade de auto similaridade.

Diversos autores escreveram sobre os diferentes conceitos de dimensão que surgiam ao con-

¹Traduções (para o inglês) dos artigos citados no presente capítulo podem ser encontradas na coletânea [1].

siderarmos conjuntos e curvas como os citados acima. Por fim, os estudos de dimensão culminaram no surgimento da teoria de dimensão fractal, que teve uma das contribuições fundamentais dadas pelo matemático alemão Felix Hausdorff, no artigo *Dimensão e Medida Exterior* de 1918.

Os objetos matemáticos citados surgiram como exemplos de casos patológicos em seus diversos contextos e foram considerados assim por um bom tempo.

O interesse prático nessas “aberrações” só veio com o matemático francês Benoît B. Mandelbrot, quando ele começou a trabalhar na IBM em 1958, e uma de suas primeiras tarefas foi analisar interferências nos sinais elétricos. Essas interferências apresentam padrões mais e mais complicados quanto maior o nível de detalhes que são observados, além disso os padrões repetem-se em diferentes escalas. Mandelbrot começou a notar que o mesmo tipo de irregularidade ocorria em diversos fenômenos da natureza e, em 1967, publicou o artigo intitulado “*Qual é o comprimento da linha costeira da Inglaterra? Auto similaridade estatística e dimensão fractal.*” Neste artigo ele discute sobre o fato de que quanto mais de perto observarmos um litoral, mais irregularidades vemos: os desníveis no solo; rochas; pequenas pedras; as rugosidades nas superfícies das pequenas pedras e até as moléculas e átomos nas pedras e no solo. Deste modo, a linha costeira é na verdade muito intrincada, com mudanças de direção a toda hora e não uma curva suave. Tais irregularidades são muito complicadas para descrever com as ferramentas da geometria euclidiana, mas uma ferramenta surgia na época que permitiria estudar esses fenômenos: a informática, a qual era acessível a Mandelbrot devido a seu trabalho na IBM.

Foi Mandelbrot quem cunhou o termo *fractal* para descrever as curvas e conjuntos patológicos que se apresentavam.

A palavra fractal vem do latim *fractus* que significa quebrado ou fraturado. Podemos pensar intuitivamente² nos fractais como formas ou figuras geométricas completamente fraturadas, mudando de direção a cada instante ou cheias de buracos.

Hoje em dia fractais são importantes para descrever diversos fenômenos naturais³. Também percebe-se a incapacidade da geometria clássica em modelar e descrever os objetos do mundo ao nosso redor, como declarou Mandelbrot em [3]:

Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são lisas, nem o raio viaja em linha reta.

Benoît B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature.*

²Infelizmente não há definição precisa e simples do que é um fractal. No próximo capítulo introduziremos, de maneira mais detalhada, o que é um fractal.

³Introduziremos alguns exemplos no próximo capítulo.

2. Introdução aos Fractais

Fractais usualmente são criados através da repetição de um processo simples, que é iterado uma infinidade de vezes a partir de um objeto (muitas vezes geométrico, como um segmento de reta). Definições formais do conceito de fractal são difíceis e, para alguns propósitos, não satisfatórias. Deste modo a melhor forma de apresentá-los é através de exemplos.

O Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor é obtido, à partir de um segmento de reta, ao iterarmos infinitas vezes o seguinte processo:

1. Divide-se cada um dos segmentos de reta formados na iteração anterior em três segmentos de igual comprimento.
2. Apaga-se os segmentos abertos centrais obtidos no item 1.

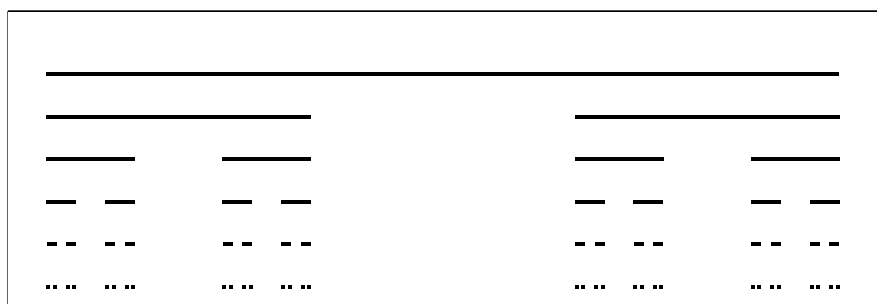


Figura 2.1: O segmento inicial e as primeiras iterações do processo que gera o Conjunto de Cantor.

É importante mostrar, ao expor esse processo de construção, os resultados obtidos após uma, duas, três, ..., n iterações; contudo o Conjunto de Cantor não é nenhum desses conjuntos, mas é o que obteríamos aplicando recursivamente esse processo infinitas vezes.

Atividade 1: Discussão sobre as propriedades do Conjunto de Cantor.

O objetivo desta atividade é identificar, juntamente com os estudantes, as principais propriedades do Conjunto de Cantor e as maiores dificuldades na sua construção. O professor pode ajudar os estudantes a chegar a algumas dessas propriedades através de questionamentos como:

- A cada iteração o comprimento do conjunto resultante aumenta ou diminui? **O comprimento diminui. A cada iteração a soma dos comprimentos dos segmentos restantes é igual a $2/3$ da soma dos comprimentos dos segmentos que haviam na iteração anterior. Assim, se o segmento inicial tem comprimento 1, o comprimento após a n -ésima iteração será $(2/3)^n$, que tende a zero quando n vai para o infinito.**
- O conjunto resultante será vazio? **Não, pois alguns pontos, como os extremos de cada um dos segmentos retirados, permanecerão até o fim.**
- É possível iterar o processo de construção infinitas vezes na prática? **Não.**
- Quais seriam as melhores medidas de segmento inicial para realizarmos algumas iterações com o auxílio de uma régua graduada? **Aquelas medidas que são múltiplos ou potências de três.**
- Quantas cópias do Conjunto de Cantor obtemos se triplicarmos¹ (esticando) o comprimento do conjunto? **Obtemos apenas duas cópias do Conjunto de Cantor, como ilustra a Figura 2.2**



Figura 2.2: A linha superior ilustra o Conjunto de Cantor original e a linha inferior ilustra o Conjunto de Cantor após uma homotetia de razão 3 no plano.

- Existe algum segmento de reta inteiramente contido no Conjunto de Cantor? Ou sempre observamos pontos espalhados? **Nenhum segmento pode estar contido no conjunto, pois o comprimento de cada segmento na n -ésima iteração é $(1/3)^n$, assim nenhum segmento de comprimento maior do que $(1/3)^n$ existirá a partir da n -ésima iteração. Contudo $(1/3)^n$ fica cada vez mais próximo de zero, quando n aumenta, de modo que nenhum segmento de comprimento maior do que zero restará no Conjunto de Cantor. Por isso dizemos que o Conjunto de Cantor tem uma estrutura fina, isto é, não importa quanto *zoom* dê-se na figura, sempre encontram-se pontos dispersos.**
- Pode-se afirmar que uma pequena parte do conjunto é similar ao todo? **Sim, o conjunto tem propriedades de auto similaridade. Isso decorre do fato de aplicarmos o processo iterativo infinitas vezes, de modo que, cada um dos 2^n segmentos obtidos na n -ésima iteração do processo sofre exatamente o mesmo processo que o segmento inicial.**

A estrutura fina do Conjunto de Cantor contrasta com os objetos simples da geometria euclidiana com seus segmentos de reta, círculos, planos e curvas definidas como o local geométrico dos pontos com uma determinada propriedade.

Descrições simples são, para muitos propósitos, melhores do que descrições complexas, contudo as ferramentas da geometria euclidiana não são adequadas para descrever muitas formas escolhidas pela natureza. De fato podemos observar em muitos fenômenos padrões excessivamente elaborados repetindo-se em escalas cada vez menores, alguns dos quais relatamos agora.

¹Esse conteúdo pode ser melhor trabalhado se os estudantes já conhecerem o conceito de homotetia, para mais detalhes vide o glossário.

A Figura 2.3 mostra o formato das folhas de um arbusto repetindo-se (grosseiramente) em escalas distintas.



Figura 2.3: Uma folha de samambaia²e ampliações de partes da folha. (Fonte: Flickr)

A Figura 2.4 mostra um raio que bifurca-se em seu caminho até o solo. Nela destacamos uma das bifurcações, que divide-se novamente, e um de seus ramos dividindo-se ainda outra vez.



Figura 2.4: Um raio³e suas muitas ramificações. (Fonte: Flickr)

²Veja direitos autorais desta imagem no final do livreto.

³Veja Direitos autorais desta imagem no final do livreto.

A Figura 2.5 mostra as muitas ramificações de um delta de rio, que divide-se em cursos menores, e esses cursos menores também dividem-se novamente.



Figura 2.5: O delta do rio Indo⁴no Paquistão. (Fonte: Flickr)

Diversos outros fenômenos apresentam características semelhantes aquelas dos exemplos que citamos. Muito além disso, esses padrões intrincados, a rugosidade, a complexidade das superfícies têm um papel importante na funcionalidade de diversos corpos e fenômenos na natureza. Como exemplos temos: as pregas, vilosidades e microvilosidades do intestino que aumentam grandemente a área de absorção; o modo como um rio desemboca formando muitas ramificações em um delta, que gera ecossistemas próprios; a porosidade do solo, que influencia como a água é absorvida; entre muitos outros.

Vamos concluir essa seção com um experimento que mostra o surgimento natural de fractais em uma célula de Hele-Shaw⁵. As interações entre fluídos diferentes, como apresentado na célula de Hele-Shaw, são importantes, por exemplo, na exploração de petróleo; onde injeta-se água nos depósitos subterrâneos para facilitar a extração (por exemplo a referência [6]).

Atividade 2: O objetivo desta atividade é mostrar que padrões intrincados e com auto similaridade, isto é repetindo os diferentes formatos em diferentes escalas, podem surgir naturalmente da interação entre dois fluídos. Para a atividade serão necessários:

1. célula de Hele-Shaw (que acompanha o livreto);
2. seringa graduada (que acompanha o livreto);
3. corante alimentar (que acompanha o livreto);
4. glicerina (que acompanha o livreto);
5. dois prendedores de papel (que que acompanham o livreto);
6. toalhas para forrar a superfície onde será feito o experimento;
7. copos para despejar despejar a glicerina e o corante;
8. luvas para não sujar as mãos com o corante.

⁴Veja direitos autorais desta imagem no final do livreto.

⁵Ver glossário.

Desenvolvimento da atividade Iniciamos montando a célula de Hele-Shaw:

1. Coloque uma placa sobre a outra, de forma que o conector fique para cima.
2. Prenda uma placa à outra utilizando grampos ou prendedores em laterais opostas.

Seguimos desenvolvendo o experimento e ponderando com os estudantes a respeito do comportamento dos fluídos:

1. Injete 2 ml de glicerina pelo conector no centro da placa. Questione os estudantes sobre como fica o formato do fluído concentrado entre as placas. **O fluído espalha-se em formato circular a partir do centro das placas.**



Figura 2.6: Distribuição da glicerina na Célula de Hele- Shaw

2. Explique para os estudantes que será injetado corante pelo mesmo conector. Questione os estudantes sobre qual formato eles imaginam que o corante irá ter. **Intuitivamente a resposta mais natural é que ela distribua-se igualmente em todas as direções, formando uma circunferência dentro da circunferência de glicerina.**
3. Injete 2 ml de corante na célula. Peça que os estudantes descrevam o resultado obtido. **Pode-se notar a formação de uma figura irregular com pequenos “braços”, que dividem-se em braços menores parecidos com os maiores e estes em braços menores ainda. A figura apresenta, deste modo, o padrão de auto similaridade em diferentes escalas que encontramos nos fractais.**



Figura 2.7: Distribuição do corante na Célula de Hele- Shaw

3. Atividades com Fractais

Apesar da notória presença de estruturas fractais na natureza motivar o seu estudo, não existe consenso sobre uma definição simples capaz de apreender de maneira adequada as diversas estruturas que chamamos de fractal¹. Uma maneira de contornar essa dificuldade é não pré-fixar um conceito, mas estudar exemplos específicos e observar que estrutura eles têm em comum.

Contudo, surge então a questão: exemplos específicos de quê? Os conjuntos que estamos interessados (e nos referimos vagamente como fractais) devem ter determinadas características. Listamos abaixo versões simplificadas das características consideradas por Falconer [2]:

Propriedades que descrevem fractais.

Quando nos referimos a um conjunto X como um fractal, tipicamente temos as seguintes características em mente:

1. X tem uma estrutura fina, isto é, detalhes em escalas arbitrariamente pequenas;
2. X é muito irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional;
3. X tem alguma forma de auto-similaridade;
4. a “dimensão fractal²” não é, na maioria dos casos, inteira;
5. X está definido de maneira simples na maioria dos casos de interesse, talvez recursivamente.

Na sequência apresentamos, então, alguns exemplos clássicos de fractais.

3.1 A Curva de Koch

A Curva de Koch foi uma das primeiras estruturas fractais descritas na matemática. Ela foi criada pelo matemático sueco Helge von Koch e apareceu pela primeira vez em 1904, em um artigo que tratava da criação de uma curva contínua sem tangentes em nenhum ponto.

¹Considerações sobre definições de fractal podem ser encontradas em [2], pág. xx.

²O conceito de dimensão fractal é estudado no capítulo 4.

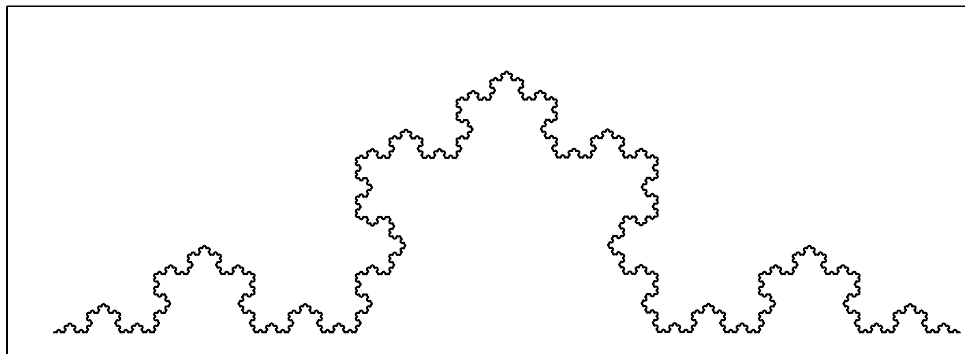


Figura 3.1: Um esboço da Curva de Koch.

A Curva de Koch

Tomando um segmento de reta e fixando um de seus lados, obtém-se a Curva de Koch ao repetir-se infinitas vezes o seguinte processo:

1. Divide-se cada um dos segmentos de reta em três segmentos de igual comprimento.
2. Desenha-se triângulos equiláteros com bases formadas pelos terços médios de cada segmento dividido no primeiro passo, de modo que todos os triângulos estejam do lado da poligonal induzido pela escolha inicial.
3. Apaga-se os segmentos centrais obtidos no primeiro passo.

A figura 3.2 ilustra as seis primeiras iterações do processo descrito na construção da Curva de Koch.

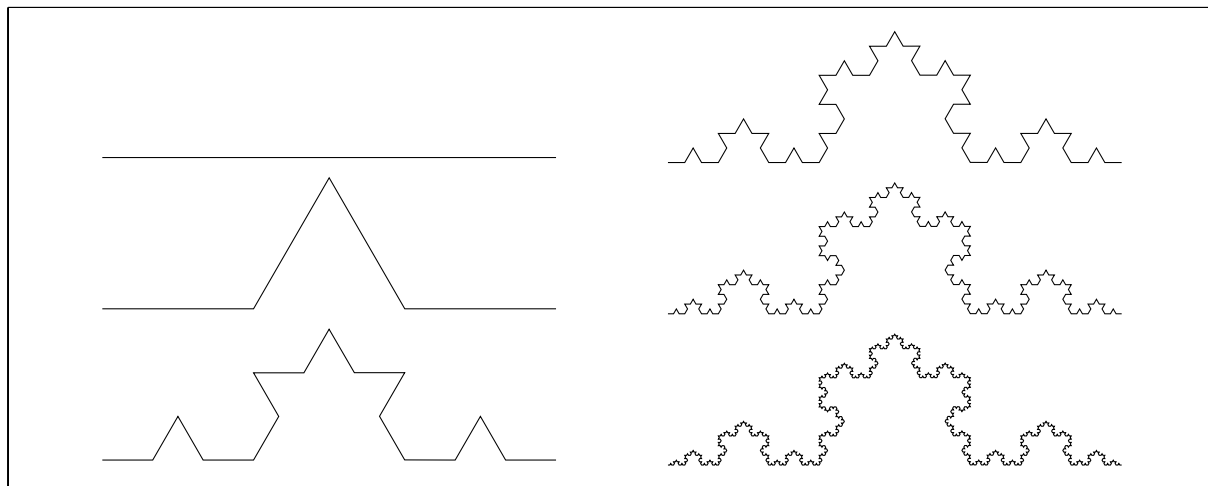


Figura 3.2: Segmento inicial e cinco iterações da Curva de Koch.

Ao tentarmos produzir manualmente a Curva de Koch, percebemos que o processo é bastante trabalhoso. De fato o número de segmentos que precisa ser substituído pelos dois lados de um triângulo, que começa em um, é multiplicado por quatro a cada nova iteração e, dessa forma, cresce exponencialmente. Além disso os detalhes adicionados a cada iteração tornam-se muito pequenos depois de alguns passos, de fato, o comprimento dos lados do triângulo gerado é dividido por 3 a cada iteração e, dessa forma, decresce exponencialmente.

Para produzir de maneira mais simples as poligonais obtidas sucessivamente vamos utilizar as

réguas que acompanham o livreto na atividade 3, que está descrita mais adiante. As réguas têm a forma obtida na terceira iteração, conforme ilustra a figura 3.3.



Figura 3.3: Uma das réguas que acompanha o livreto

Contudo, para compreender como utilizar as réguas corretamente, precisaremos entender algumas das propriedades dessas poligonais.

Cópias das poligonais: Observa-se que a poligonal obtida na k -ésima iteração é formada por quatro cópias da poligonal obtida na $(k-1)$ -ésima iteração encolhidas³ para um terço de seu tamanho original. As razões intuitivas para a validade desta propriedade são que: a primeira iteração faz quatro segmentos com $1/3$ do comprimento do segmento inicial e, além disso, cada nova iteração é aplicada nesses segmentos e nas poligonais geradas a partir deles. Assim, aplicar k iterações no segmento inicial é o mesmo que aplicar $(k-1)$ iterações em cada um dos quatro segmentos com $1/3$ do comprimento do segmento inicial.

Entendemos que a explicação intuitiva é preferencial para alunos do ensino básico. Contudo, para demonstrar de fato a validade desta propriedade, é necessário um argumento de indução, que deixamos como exemplo:

- A primeira iteração transforma o segmento inicial em uma poligonal com quatro segmentos, todos com um terço do comprimento original.
- Suponha que a poligonal P_k obtida na k -ésima iteração tiver quatro cópias reduzidas P_{k1} , P_{k2} , P_{k3} e P_{k4} da poligonal P_{k-1} obtida na iteração $k-1$. Então a próxima iteração aplica o mesmo processo em P_{k1} , P_{k2} , P_{k3} , P_{k4} e P_{k-1} , que são idênticas a menos do tamanho e da posição, e portanto produz o mesmo resultado. Assim obtemos que P_{k+1} é formada por 4 cópias reduzidas de P_k .

A Figura 3.2 permite visualizar esta propriedade das cópias das poligonais em várias iterações. Ilustramos a propriedade em detalhe na Figura 3.4.

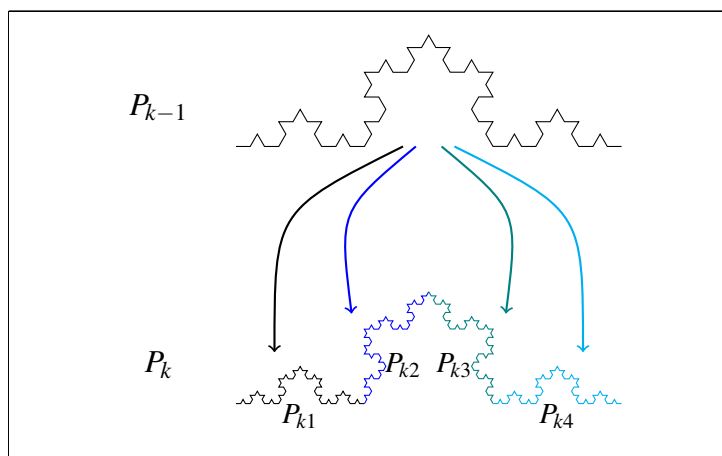


Figura 3.4: Cópias a cada iteração

³Aplicando uma homotetia de razão $1/3$ em algum ponto do plano.

Deste modo, se ampliarmos⁴ três vezes a figura obtida na $(k + 1)$ -ésima iteração, obteremos quatro cópias idênticas da poligonal obtida na k -ésima iteração. A figura 3.6 abaixo ilustra a obtenção de cópias idênticas ao compor as iterações que geram a curva com homotetias de razão 3.

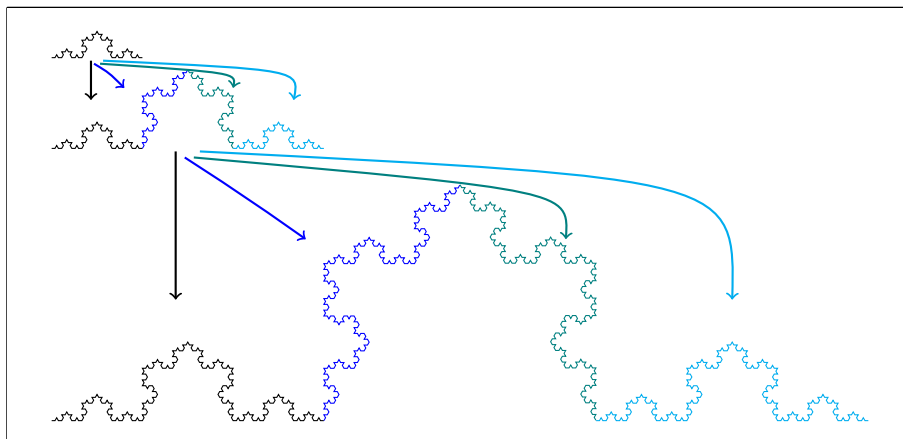


Figura 3.5: Iterações compostas com ampliações

As régua que acompanham o livreto podem ser utilizadas para produzir as poligonais obtidas pelo processo descrito acima. Para isso pensamos nas poligonais como suportadas por uma reta de apoio, que contém os segmentos final e inicial dela. A poligonal da terceira iteração é obtida traçando uma vez a régua. A poligonal da quarta iteração é obtida traçando a régua quatro vezes sucessivamente, mas formando ângulos de 60° , -120° e 60° . Para a terceira iteração, dezesseis cópias são necessárias. As régua têm marcações com os ângulos para o correto traçado das curvas e deve-se utilizar grafite⁵ 0.5, de acordo com as ilustrações abaixo:

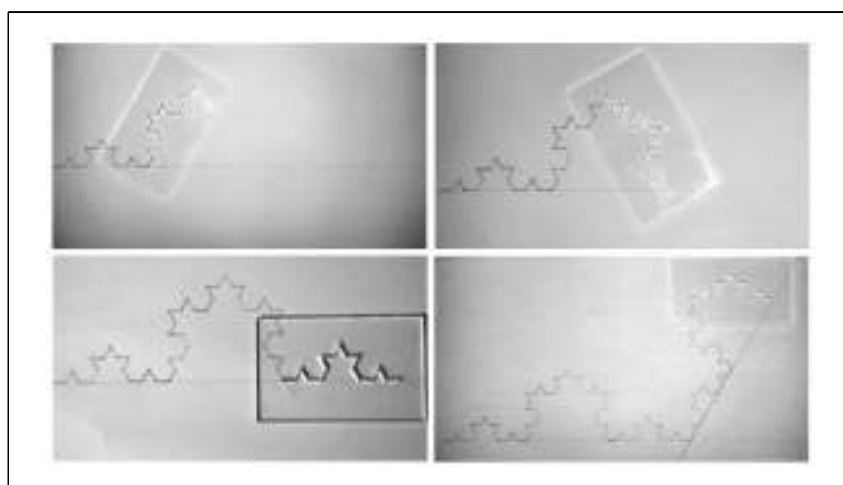


Figura 3.6: Aplicando as régua para construir poligonais que geram a Curva de Koch⁶

⁴Aplicando uma homotetia de razão 3 em algum ponto do plano.

⁵A lacuna na régua é estreita para reduzir os erros de construção, que acumulariam-se com as várias iterações, por isso da necessidade de grafite 0.5.

⁶Note as linhas de base que usamos para tentar minimizar os erros de construção.

Atividade 3

1. Divida os estudantes em grupos de três e instrua-os a construir, utilizando as réguas fornecidas, seis iterações da Curva de Koch ampliada descrita anteriormente.
2. Identifique, juntamente com os estudantes, as principais propriedades da Curva de Koch (sem ser ampliada) e as maiores dificuldades na sua construção. O professor pode ajudar os estudantes a chegar a algumas dessas propriedades através de questionamentos como:
 - Quais são as dificuldades encontradas para produzir as poligonais do processo com ampliações?
 - Quais as diferenças entre a Curva de Koch e sua versão com as ampliações? **Apenas o tamanho, assim podemos utilizar a curva construída com as réguas para compreender a Curva de Koch original.**
 - Quais são as vantagens e desvantagens em usar a curva ampliada para compreender a Curva de Koch original? **A curva original tem detalhes muito pequenos que são difíceis de construir após algumas iterações, contudo a curva ampliada cresce muito rapidamente o que limita seu uso devido ao tamanho da folha de papel.**
 - Qual o número de segmentos que tem a poligonal obtida na k -ésima iteração do processo de construção da Curva de Koch original? **São 4^k segmentos, pois começamos com um segmento e cada segmento existente em uma iteração é trocado por uma poligonal com 4 segmentos no próximo passo.**
 - Qual o comprimento de cada segmento obtido na k -ésima iteração do processo? **Cada segmento mede $1/3^k$ do segmento original, pois cada segmento existente em uma iteração é substituído por uma poligonal com segmentos medindo $1/3$ de seu comprimento.**
 - Qual o comprimento da poligonal obtida na k -ésima iteração? **$(4/3)^k$ vezes o comprimento da curva inicial, pois temos 4^k segmentos, cada um medindo $1/3^k$ do comprimento da curva inicial.**
 - O que acontece com o comprimento da curva obtida após infinitas iterações? **O comprimento tende ao infinito, pois $4/3$ é maior do que 1, garantindo que $(4/3)^k$ é crescente e não limitada.**
 - O que seria uma reta tangente a uma das poligonais? **Nos pontos que não são extremos de cada um dos segmentos que formam a poligonal, a tangente⁷ é a reta que contém o próprio segmento; contudo nos pontos extremos dos segmentos a curva não possui tangentes.**
 - A Curva de Koch tem alguma tangente? **Não, por que, assim como o Conjunto de Cantor, nenhum segmento de comprimento maior do que zero cabe em todas as poligonais e, portanto, também não existem segmentos na Curva de Koch.**

Por fim, ilustramos, apenas como exemplo complementar, o Floco de Neve de Koch (ou Estrela de Koch); que é obtido ao construirmos três curvas de Koch simultaneamente a partir dos lados de um triângulo equilátero.

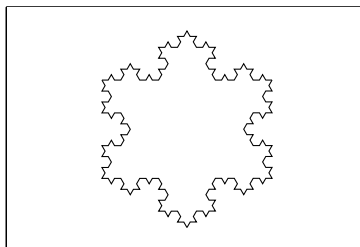


Figura 3.7: Floco de Neve de Koch

⁷Ver glossário.

3.2 A Curva do Dragão

A Curva do Dragão⁸ foi inventada pelo cientista da NASA, John Heighway em 1966, e nomeada pelo seu colega, William Harter, que foram os primeiros a investigar a curva. Uma das primeiras popularizações da curva ocorreu na revista Scientific American, na coluna de Martin Gardner, em 1967.

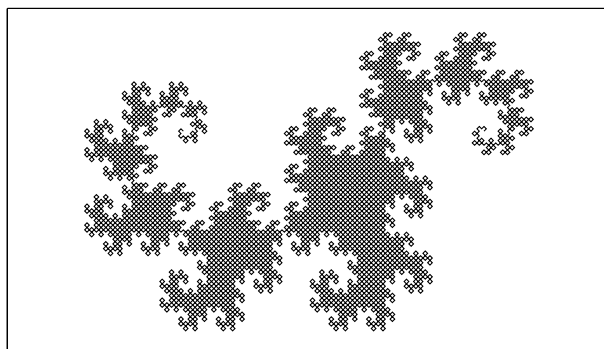


Figura 3.8: Esboço da Curva do Dragão

A Curva do Dragão também é obtida a partir de um segmento de reta ao aplicarmos infinitas iterações de um processo que é descrito mais adiante no texto. Contudo as k -ésimas poligonais surgem naturalmente ao dobrar uma tira de papel.

Curva do Dragão a partir de uma tira de papel

A k -ésima poligonal da Curva do Dragão pode ser obtida através de dobraduras sucessivas de uma tira de papel do seguinte modo:

1. Seguramos uma ponta da tira de papel em cada mão e dobramos a tira de papel ao meio k -vezes sucessivamente, sempre levando a parte do lado direito sobre a parte do lado esquerdo;
2. Abre-se a tira de papel mantendo ângulos retos em cada uma das dobras formadas.

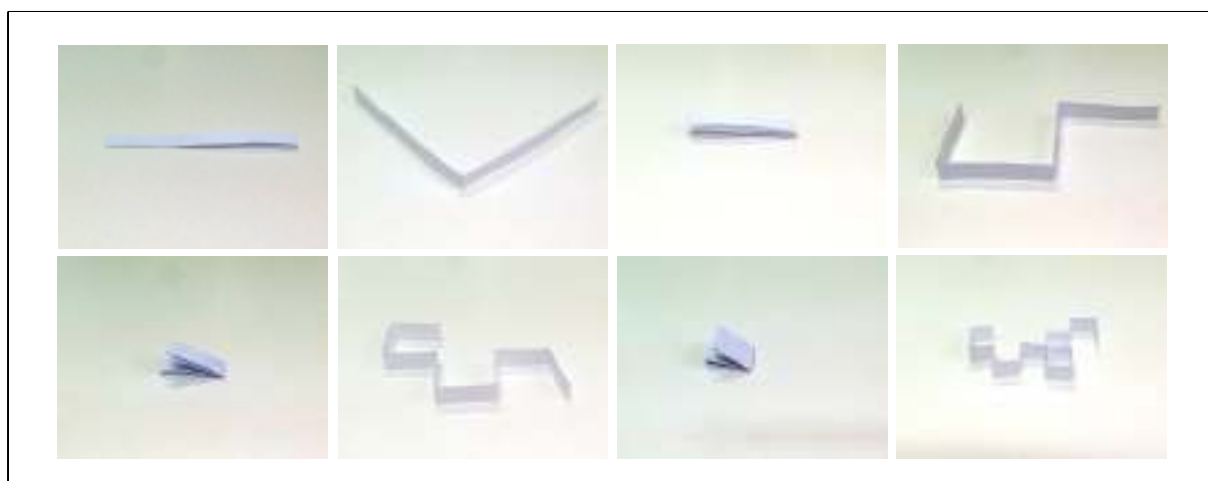


Figura 3.9: Produzindo as iterações 1, 2, 3 e 4 a partir de uma tira de papel

⁸Também conhecida como Dragão “Jurassic Park” ou Dragão de Harter-Heighway.

Atividade 4: Divida os estudantes em grupos de três e solicite que desenhem em uma folha de papel as poligonais obtidas nas primeiras 5 iterações da Curva do Dragão aplicando o processo descrito anteriormente com uma tira de papel e tracejando a curva obtida.

A figura 3.10 ilustra um segmento de reta e as primeiras poligonais obtidas ao dobrarmos a folha de papel sucessivamente.

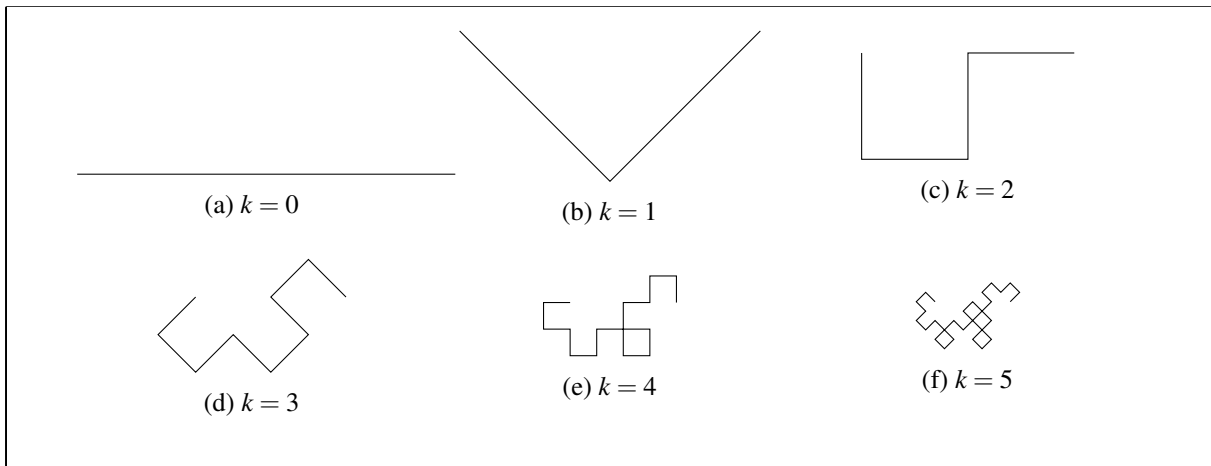


Figura 3.10: k -ésima poligonal na construção da Curva do Dragão para alguns valores de k

Note que a curva parece encolher a cada iteração, contudo o comprimento permanece constante (igual ao comprimento da tira de papel). Além disso o número de segmentos na figura dobra a cada nova iteração realizada.

Para compreender o que acontece com a Curva do Dragão, é necessário explorar algumas propriedades das poligonais obtidas.

Atividade 5: Discuta, juntamente com os estudantes, a validade de cada uma das propriedades listadas nas caixas roxas a seguir.

O número de vértices e segmentos

O número de segmentos da poligonal obtida na k -ésima iteração é 2^k . Esta propriedade vale por que, a cada iteração, dobramos cada segmento da poligonal ao meio, transformando-o, deste modo, em dois outros segmentos.

O número de vértices da poligonal obtida na k -ésima iteração é $1 + 2^k$, pois uma poligonal tem um segmento para cada vértice além do segmento inicial.

O comprimento dos segmentos cai pela metade a cada iteração

O comprimento de cada segmento cai pela metade pois cada segmento é dobrado (dividido) ao meio. Assim, novamente por indução, o comprimento dos segmentos é $l(1/2)^k$, onde l é o comprimento do segmento inicial.

Contração da curva com as iterações

Quando compara-se uma das poligonais obtidas com a próxima, percebemos que a poligonal obtida na k -ésima iteração é formada na poligonal da $(k+1)$ -ésima pelos vértices ímpares, como ilustra a figura 3.12, contudo com tamanho reduzido. Isto ocorre pois ao dobrarmos os segmentos obtidos na k -ésima iteração mais uma vez, estamos adicionando um vértice entre cada par de vértices adjacentes já existentes na k -ésima iteração. Além disso os ângulos entre os segmentos $V_{2k-1}V_{2k+1}$ e $V_{2k+1}V_{2k+3}$ é reto pois o ângulo entre os segmentos $V_{2k}V_{2k+1}$ e $V_{2k+1}V_{2k+2}$ é reto (e para o lado correto) pela definição da curva e, além disso, os ângulos entre $V_{2k-1}V_{2k+1}$ e $V_{2k}V_{2k+1}$ e o ângulo entre $V_{2k+1}V_{2k+3}$ e $V_{2k+1}V_{2k+2}$ são de 45° , ambos para o mesmo lado.

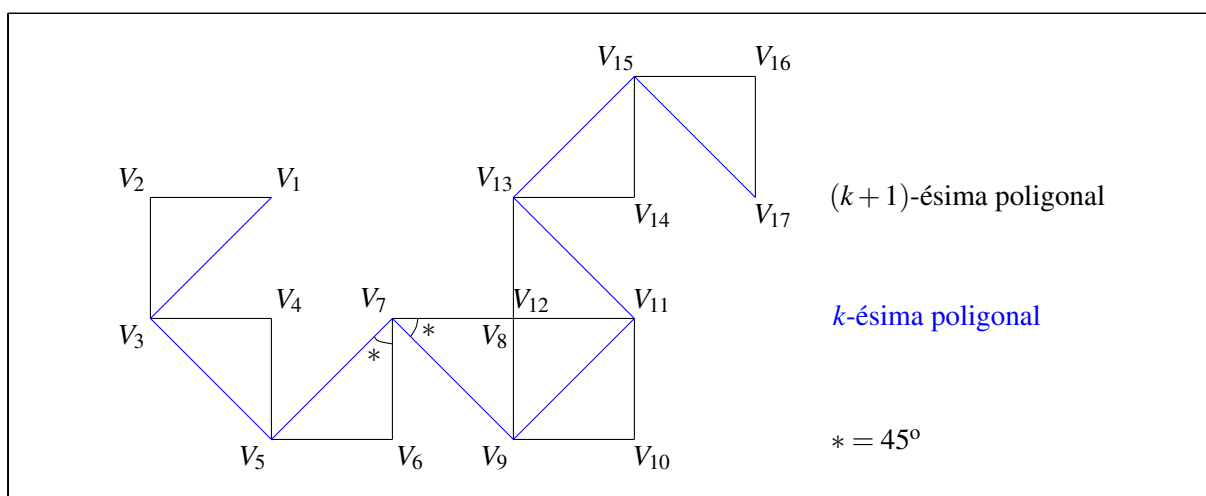


Figura 3.11: A k -ésima poligonal na $(k+1)$ -ésima iteração

A curva parece encolher

A imagem da poligonal da k -ésima iteração na próxima iteração é encolhida⁹ pelo fator $1/\sqrt{2}$. Isso ocorre porque cada segmento em uma iteração é dividido em 2 e cada uma das metades é um cateto no triângulo retângulo cuja diagonal é o segmento formado pelos vértices de índices ímpares, como ilustra a figura 3.12, assim:

$$x^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{2} \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

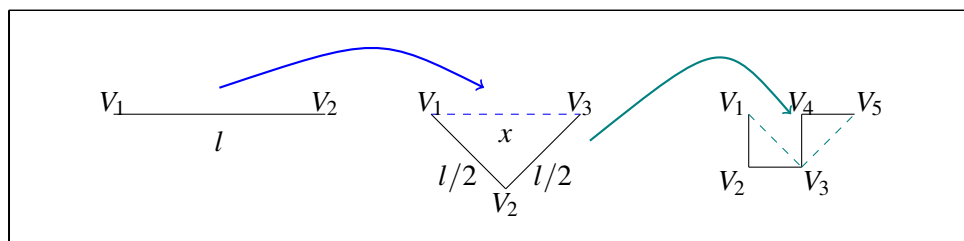


Figura 3.12: Poligonais consecutivas

Outra maneira de interpretar a propriedade de que a curva parece encolher é esta: se realizarmos uma dilatação (homotetia) de $\sqrt{2}$ no plano a cada iteração da Curva do Dragão, permanecemos com uma

⁹ Através de uma homotetia de razão $1/\sqrt{2}$.

curva diâmetro¹⁰ constante, como ilustra a Figura 3.13.

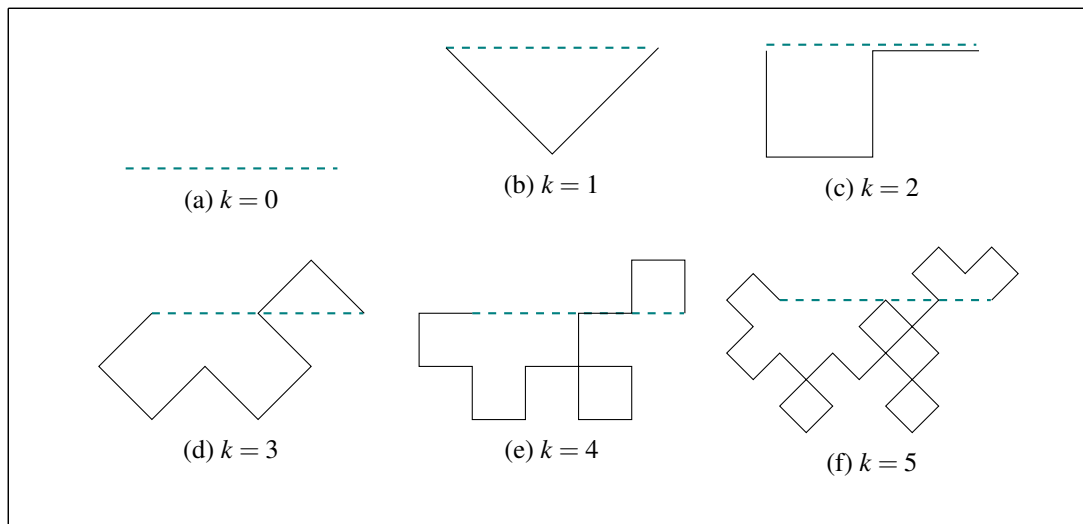


Figura 3.13: O segmento inicial e as cinco primeiras iterações dilatadas por um fator de $\sqrt{2}$

Observando a figura 3.11, temos que a presença da poligonal da k -ésima iteração na poligonal da iteração $(k + 1)$ pode ser entendida da seguinte forma: para construir a $(k + 1)$ -ésima poligonal a partir da k -ésima poligonal, basta traçar um triângulo retângulo isósceles sobre cada segmento da k -ésima poligonal, de modo que a hipotenusa do triângulo seja o segmento já existente, e, então, apagar os segmentos já presentes na k -ésima poligonal. Todavia ainda é necessário decidir de qual dos lados do segmento deve ser traçado o triângulo retângulo; a figura 3.11 indica que os lados alternam-se.

Aumentar uma iteração acrescenta dobras alternadas nos segmentos existentes

Vamos pensar no que ocorre ao dobrarmos mais uma vez a tira de papel já dobrada n vezes. A tira já dobrada n vezes é uma pilha de 2^n seções planas da tira; ao dobrarmos mais uma vez, dobramos cada uma dessas seções ao meio, com todas as dobras para baixo. Contudo as seções estão empilhadas de modo que se uma começa na esquerda e termina na direita, a próxima começará na direita e terminará na esquerda. Assim, ao abrirmos a tira, os novos ângulos são formados, alternadamente, para lados opostos.

¹⁰Por diâmetro queremos dizer a distância entre o ponto final e o ponto inicial da curva.

Se adicionarmos a cada iteração uma ampliação da poligonal através de uma homotetia de razão $\sqrt{2}$, podemos então construir, sucessivamente, a $(k + 1)$ -ésima poligonal através do processo de trocar cada segmento da k -ésima poligonal pelos catetos dos triângulos retângulos isósceles, como mostra a figura 3.14.

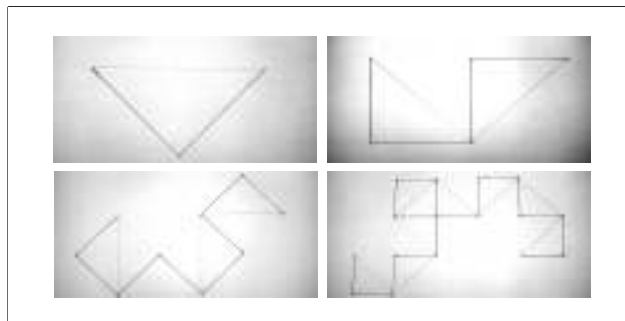


Figura 3.14: Construção das poligonais substituindo segmentos por catetos

Atividade 6: Divida os estudantes em grupos pequenos (de 3 ou 4 estudantes, para que todos participem de fato) e solicite que desenhem em uma folha de papel as poligonais obtidas nas primeiras 6 iterações da Curva do Dragão aplicando o processo da figura 3.14.

Esta forma de construir a curva nos dá um meio para definir matematicamente a Curva do Dragão, isto é, sem utilizar uma tira de papel. A definição a seguir ainda resolve o problema da curva parecer encolher a cada iteração, como na dobra do papel. Assim, a versão seguinte é equivalente à combinação das iterações que geram a Curva do Dragão a partir de uma tira de papel com homotetias de razão $\sqrt{2}$.

Definição Matemática da Curva do Dragão.

A Curva do Dragão é a curva obtida, a partir de um segmento de reta, após infinitas iterações do seguinte processo recursivo:

1. Tomando cada segmento como hipotenusa, desenha-se triângulos retângulos isósceles, de modo que as alturas dos triângulos estejam sucessivamente (quando percorre-se a curva da esquerda para a direita) à direita e à esquerda do segmento a partir do qual foi criado o triângulo.
2. Apagam-se as hipotenusas dos triângulos desenhados.

A próxima propriedade é percebida quando comparam-se uma das poligonais obtidas com a próxima: a poligonal obtida pela iteração seguinte é formada por duas cópias reduzidas¹¹ da poligonal anterior, com um ângulo reto entre elas, conforme ilustra a figura 3.15.

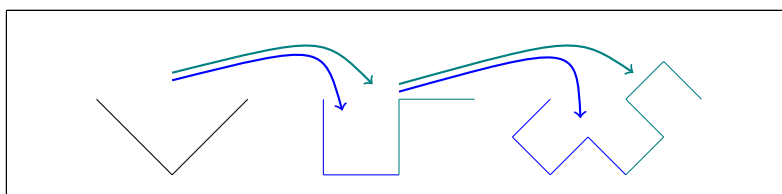


Figura 3.15: Cópias consecutivas

¹¹Na figura 3.15 estão ilustradas as poligonais obtidas com a definição matemática da curva do dragão, que é equivalente a as poligonais obtidas com a tira de papel, mas ampliadas pela razão $\sqrt{2}$ a cada iteração.

Aumentar uma iteração cria duas cópias da iteração anterior consecutivas

Na definição matemática da Curva do Dragão, a $(k + 1)$ -ésima poligonal é formada por duas cópias¹² da k -ésima poligonal, com um ângulo reto (no sentido horário) entre elas e a segunda cópia feita de trás para a frente. Este fato pode ser demonstrado por indução à partir da definição matemática.

A propriedade também pode ser comprovada a partir da primeira definição, pois dobrar a tira de papel $k + 1$ vezes é o mesmo que dobrá-la uma vez e, então, dobrá-la k vezes. Assim aplicamos o processo das k iterações em cada uma das metades da tira de papel. Além disso a metade de cima da tira é dobrada identicamente à metade de baixo, mas é traçada no sentido contrário, a partir do ponto de união entre as duas metades da tira. O ângulo reto entre as duas metades é sempre no sentido horário, pois é o ângulo da primeira dobra.

Podemos tirar proveito dessa observação para construir muitas iterações da Curva do Dragão (seguida de dilatações que dobram o tamanho da curva) utilizando a régua, que contém a forma obtida na terceira iteração da Curva do Dragão:



Figura 3.16: Uma das régua que acompanha o livreto

Estão gravadas as letras “E” e “D” na régua, e as ranhuras das letras devem ficar para cima. Notação para descrever o modo de utilização da régua:

- R_e - Significa desenhar a terceira iteração da Curva do Dragão utilizando a régua da esquerda para a direita.
- R_d - Significa desenhar a terceira iteração da Curva do Dragão utilizando a régua da direita para a esquerda.
- A - Significa girar a régua 90° no sentido anti-horário.
- H - Significa girar a régua 90° no sentido horário.

Utilizando essa notação e o fato de cada nova iteração cria duas cópias da iteração anterior consecutivas¹³ obtém-se:

Três iterações	R_e
Quatro iterações	R_eHR_d
Cinco iterações	$R_eHR_dHR_eAR_d$
Seis iterações	$R_eHR_dHR_eAR_dHR_eHR_dAR_eAR_d$

Note que ao avançar de uma iteração para a próxima, obtém-se uma cópia da iteração anterior, seguida de um giro de 90° e outra cópia da iteração anterior, mas traçada no sentido contrário, de modo que é necessário trocar R_e por R_d , H por A e vice-versa. Isso ocorre pois desenhamos a primeira metade

¹²Reduzidas por um fator de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

¹³Como explicado na caixa da propriedade anterior.

da curva e depois outra metade da curva, fazendo um ângulo de 90° com ela, mas desenhada de trás para frente.

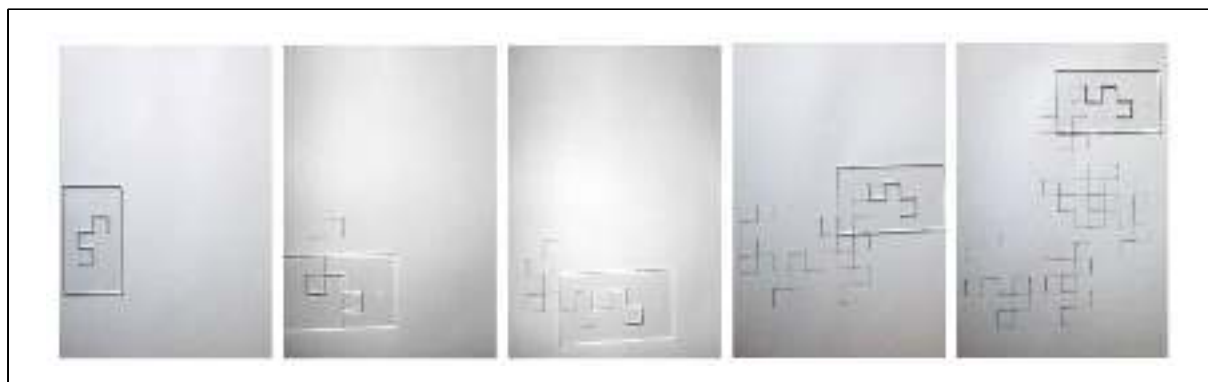


Figura 3.17: Produzindo com a régua as iterações 3, 4, 5, 6 e 7 do processo que gera a Curva do Dragão

Atividade 7: Explique para os estudantes como utilizar a régua para produzir iterações da Curva do Dragão, exemplificando com as indicações acima como construir até a quinta iteração. Em seguida reúna os estudantes em grupos de 3 e peça que utilizem as régua para gerar a sexta iteração da Curva do Dragão.

3.3 O Triângulo de Sierpinski

Todos os exemplos das seções anteriores são de fractais obtidos a partir de poligonais no plano, contudo, fractais também podem ser definidos a partir de polígonos e sólidos¹⁴.

Um exemplo de fractal gerado a partir de um polígono é o Triângulo de Sierpinski. Este fractal foi descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpiński em 1915, embora já fosse usado como padrão de decoração¹⁵ vários séculos antes. Aplicações decorativas mais modernas também existem, como no logo do PROFMAT e na série de jogos de videogames “*The Legend of Zelda*”.

A figura da capa desse livreto é formada por dois Triângulos de Sierpinski, um em tons de roxo e o outro em tons de verde, superpostos.

Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é a figura obtida, a partir de um triângulo equilátero, após infinitas iterações do seguinte processo:

1. Remove-se, de cada triângulo equilátero, o triângulo definido pelos pontos médios de suas arestas.

¹⁴Além disso eles também podem ser produzidos através de aplicações sucessivas de determinadas funções, e. g. [4].

¹⁵Por exemplo há aplicações decorativas do Triângulo de Sierpinski datando do século XIII na Basílica de Santa Maria em Cosmedin, que fica em Roma, na Itália.

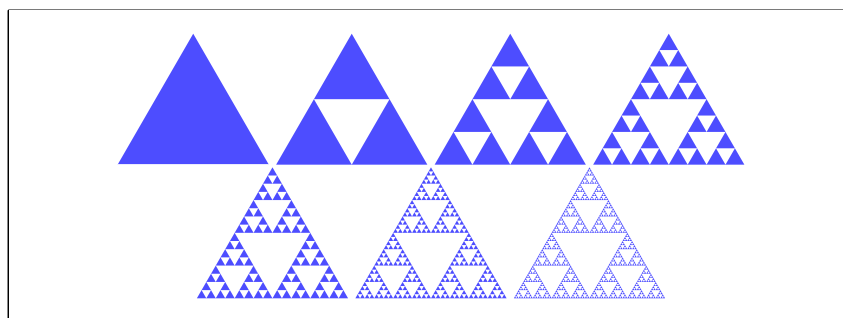


Figura 3.18: O triângulo inicial e as seis primeiras iterações do processo

Deixamos a cargo do leitor a investigação das propriedades do Triângulo de Sierpinski!



4. Dimensão Fractal

Retornando ao exemplo, trabalhado inicialmente, do Conjunto de Cantor, temos que, apesar de não ser um conjunto vazio, tem comprimento zero.

Entretanto medir o comprimento desse conjunto não nos ajuda a compreender o seu tamanho. Isso ocorre devido ao Conjunto de Cantor não ter a mesma dimensão do que um segmento de reta ou de uma curva e, assim, o comprimento não dá informação relevante sobre o tamanho.

Para os objetos da geometria euclidiana a dimensão é geralmente óbvia: um retângulo tem dimensão 2, uma curva tem dimensão 1 e uma esfera tem dimensão 3. O comprimento mede o tamanho de um objeto de dimensão 1, a área mede o tamanho de um objeto de dimensão 2 e o volume mede o tamanho de um objeto de dimensão 3. Contudo, se tentássemos utilizar um desses conceitos em um objeto da dimensão errada, obteríamos respostas não muito úteis ou perguntas sem sentido. Por exemplo:

Qual a área de um segmento de reta?

Qual o comprimento de uma esfera?

Qual é o volume de um disco?

Qual é o comprimento de um ponto?

Antes de abordarmos o conceito de dimensão fractal, vamos explorar como as dilatações e contrações do espaço (homotetias) estão relacionadas com a dimensão de alguns objetos conhecidos.

Seja l um segmento, independente de ele estar na reta, no plano ou no espaço, e seja k um número natural. Temos que uma homotetia de razão k transforma l em um outro segmento, que mede k vezes o comprimento de l . Este segmento ampliado pode, deste modo, ser visto como k cópias de l . Vê-se na figura 4.1 que uma homotetia de razão 3 gera três cópias do segmento original.

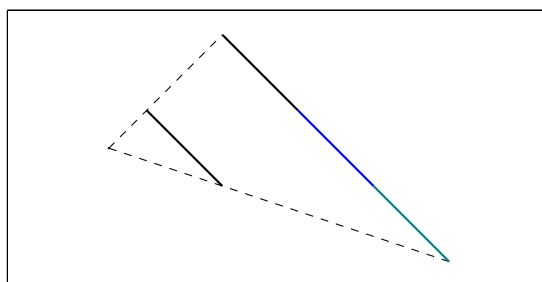


Figura 4.1: Efeito de uma homotetia de razão 3 em um segmento

Seja Q um retângulo, independente de ele estar no plano ou no espaço, e seja k um número natural. Temos que uma homotetia de razão k transforma Q em um outro retângulo, cuja área é k^2 vezes a área de Q . Este retângulo ampliado pode, deste modo, ser visto como k^2 cópias de Q . Vê-se na Figura 4.2 que uma homotetia de razão 4 produz um retângulo que contém 16 figuras iguais ao retângulo original.

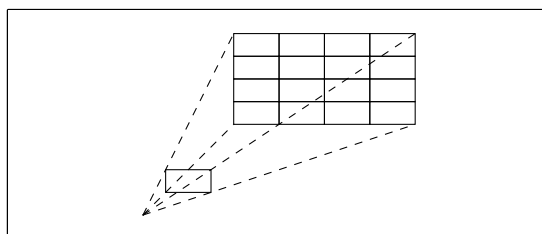


Figura 4.2: Efeito de uma homotetia de razão 4 em um retângulo

Seja C um cubo no espaço e seja k um número natural. Temos que uma homotetia de razão k transforma C em um outro cubo, cujo volume é k^3 vezes o volume de Q . Este cubo ampliado pode, deste modo, ser visto como k^3 cópias de C . Vê-se na Figura 4.3 que uma homotetia de razão 4 produz um cubo que contém 64 cubos idênticos ao cubo original.

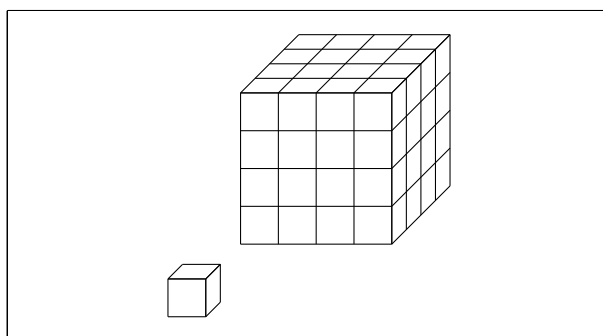


Figura 4.3: Efeito de uma homotetia de razão 4 em um cubo

Nota-se que, nos três exemplos dados, o que chamamos de dimensão está no expoente do número k^n de cópias da figura original que obtivemos ao realizar a homotetia de razão k . Uma maneira de encontrar uma expressão que retire esse expoente do número de cópias obtidos é aplicando logaritmos:

$$n = \log_K(K^n).$$

No exemplo do segmento: $\log_3 3 = 1$.

No exemplo do retângulo: $\log_4 16 = 2$.

No exemplo do cubo: $\log_4 64 = 3$.

Isso nos motiva a considerar o seguinte¹ conceito de dimensão fractal, que é utilizado para medir quanto de espaço o fractal ocupa de fato.

Dimensão fractal

Se realizando uma homotetia de razão k obtém-se n cópias do fractal, definimos a **dimensão fractal** deste fractal como

$$dim = \log_K n.$$

Atividade 8: Explique aos estudantes o conceito de dimensão fractal e motive o conceito através dos exemplos apresentados.

Vimos que, nos fractais estudados, as poligonais da k -ésima iteração são copiadas algumas vezes na $(k + 1)$ -ésima iteração, contudo estas cópias são reduzidas. Os fractais gerados por estas iterações estão copiados em si mesmos igualmente². Discuta com os estudantes qual a razão da homotetia que devemos aplicar, em cada um dos fractais, para gerar cópias idênticas. Além disso, discuta quantas cópias das figuras originais são geradas por estas homotetias.

- Conjunto de Cantor. [Uma homotetia de razão 3 gera 2 cópias do conjunto.](#)
- Curva de Koch. [Uma homotetia de razão 3 gera 4 cópias do conjunto.](#)
- Curva do Dragão [Uma homotetia de razão \$\sqrt{2}\$ gera 2 cópias do conjunto.](#)

Utilizando essas informações calcule, com os estudantes, as dimensões dos três fractais.

Conjunto de Cantor $dim = \log_3 2 \approx 0,63093$.

Curva de Koch $dim = \log_3 4 \approx 1,26186$.

Curva do Dragão $dim = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$.

Fractais em geral não precisam ter auto-similaridade exata, isto é, que pequenas partes sejam cópias reduzidas exatas do todo, de modo que a dimensão apresentada não é suficiente para todos os casos. O estudo de fractais em geral e suas dimensões tem teorias mais elaboradas e o presente material é apenas um ponto de partida para este estudo.

¹Existem também outros conceitos de dimensão fractal, para mais sobre o assunto sugerimos [2].

²Aceitaremos esse fato agora, para mais detalhes consulte [5].

Glossário

Célula de Hele-Shaw

Uma *célula de Hele-Shaw*, que foi nomeada em homenagem ao engenheiro inglês Henry Selby Hele-Shaw (1854 - 1941), é formada por duas placas paralelas separadas por uma pequena distância. As células são utilizadas no estudo do fluxo de fluídos viscosos entre placas paralelas em diversos contextos. Em um experimento de laboratório, uma célula de Hele-Shaw pode ser construídas com duas placas paralelas de material transparente (para que seja possível observar o interior da célula) com um furo central, por onde é injetado o fluído.

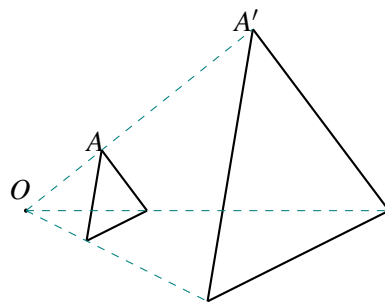


Homotetia

Uma *homotetia* é uma deformação do plano, que dilata ou contrai todas as distâncias a partir de um ponto fixo. Podemos enxergar uma homotetia como o equivalente matemático de um *zoom*. Uma homotetia centrada em O e com razão de homotetia k é a transformação afim que a cada ponto A do plano faz corresponder o ponto A' de modo que:

$$\vec{OA'} = k\vec{OA}.$$

Note que ângulos, razões entre comprimentos, razões entre áreas, razões entre volumes e o paralelismo de retas são preservados.



Indução (Matemática)

Indução é um método usado na Matemática para demonstrar propriedades em conjuntos com infinitos elementos, especialmente para propriedades em \mathbb{N} . Para demonstrar que uma determinada propriedade vale para todo número natural pode-se utilizar o seguinte axioma:

Se uma propriedade $P(n)$ vale para $n = 1$ e, além disso, se $P(n)$ vale implicar que $P(n + 1)$ vale; então $P(n)$ vale para todo número natural.

Iteração

Iteração é o ato de repetir um processo com o propósito de ou gerar uma lista ilimitada de resultados ou aproximar um objetivo desejado. Cada repetição do processo é dita uma *iteração* e o resultado de uma iteração é usado como ponto inicial para a próxima iteração.

Exemplo: Citamos o processo babilônico para a extração da raiz quadrada do número n através de iterações da função

$$f(r) = \frac{1}{2} \left(r + \frac{n}{r} \right),$$

à partir de uma escolha inicial r_0 .

Para aproximarmos a raiz de 43 com 4 casas decimais de precisão partimos da escolha inicial $r_0 = 5$ calculamos

$$r_0 = 5 \rightarrow r_1 = f(r_0) = 6,8$$

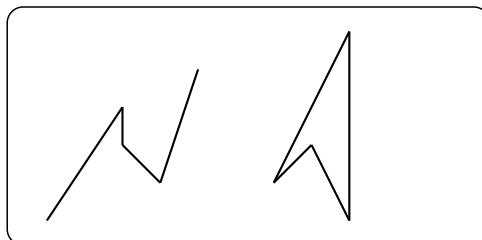
$$r_2 = f(r_1) = 6,5618 \rightarrow r_3 = 6,5574$$

$$r_4 = f(r_3) = 6,5574.$$

Ao percebermos que o processo repete o valor anterior, chegamos ao resultado com a precisão escolhida.

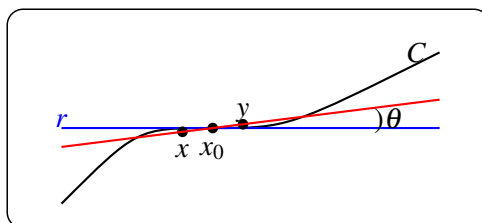
Poligonal

Uma *poligonal* é uma sequência de segmentos de reta, na qual os pontos final e inicial de segmentos consecutivos coincidem. Uma poligonal pode ser fechada ou aberta.



Retas Tangentes

Existem alguns conceitos distintos de *reta tangente*. No contexto deste trabalho, dizemos que uma curva C tem uma *tangente* (forte) em um ponto $x_0 \in C$ se existe uma reta r de modo que, para qualquer ângulo $1 \gg \theta > 0$, todas as secantes passando através de x e y fazem ângulo com r menor do que θ ou são paralelas a r , se tomarmos x e y suficientemente próximos de x_0 .





Referências

- [1] Gerald A. Edgar (ed.), *Classics on fractals*, Studies in Nonlinearity, Westview Press. Advanced Book Program, Boulder, CO, 2004.
- [2] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1990.
- [3] Benoit B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman & Company, New York, 1982.
- [4] Elizabeth Wegner Karas and Celso Penteado Serra, *Fractais gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos*, Champagnat, Curitiba, 1997.
- [5] Marcos Roberto Dalpiaz, *Um estudo sobre fractais: origem e proposta didática para aplicação em aula.*, Curitiba, 2016.
- [6] Gabriel C. Mariano, Fabrício F. Cardoso, Toni J. Lopes, Mara Gabriela N. Quadri, Ricardo Antonio F. Machado, and Marinho B. Quadri, *Um estudo experimental sobre a instabilidade da interface no deslocamento de óleo por injeção de água.*, 4^o PDPETRO, 2007.
- [7] Sergei Tabachnikov, *Dragon curves revisited*, Math. Intelligencer **36** (2014), no. 1, 13–17.
- [8] *Homotetia* (10 Dez 2015), <https://pt.wikipedia.org/wiki/Homotetia>.
- [9] The Telegraph, *Benoit Mandelbrot* (17 Oct 2010), <http://www.telegraph.co.uk/news/obituaries/science-obituaries/8069558/Benoit-Mandelbrot.html>, publicado na seção de obituários.
- [10] *Hele-Shaw Flow* (18 Mai 2015), https://en.wikipedia.org/wiki/Hele-Shaw_flow.
- [11] *Iteration* (25 Feb 2016), <https://en.wikipedia.org/wiki/Iteration>.
- [12] *Sierpinski Triangle* (10 Jun 2016), https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle.



Posfácio

Este livreto foi elaborado paralelamente à dissertação de mestrado [5] de um dos autores, o Marcos Roberto Dalpiaz, durante seu mestrado no PROFMAT no campus Curitiba da UTFPR. A dissertação trata em maior detalhe alguns dos temas do trabalho e foi orientada pelo outro autor do livreto, Márcio Rostirolla Adames.

Os autores agradecem ao PROFMAT pela oportunidade de desenvolver este trabalho. Agradecemos muito as revisões criteriosas da Prof^a. Angelita Minetto Araújo, que certamente contribuíram bastante para o resultado final. Agradecemos também a paciência e as sugestões daqueles que se dispuseram a ler as primeiras versões do trabalho, entre eles: Prof. André Fabiano Steklain Lisbôa, Prof. Roy Wilhelm Probst e Yara Rostirolla Adames.

Conteúdo por Márcio Rostirolla Adames e Marcos Roberto Dalpiaz.

A Figura 2.4 foi criada a partir da foto: Lightning - by John Fowler. Tirada em 25 de julho de 2009. No FLICKR:

<https://www.flickr.com/photos/snowpeak/3761397565/in/photolist-6Jo9sa-bWugk2-iAY7Q-nt8E9i-ag5w9A-8zGf9K-5hZRRz-8FtdcN-2Ktzho-75EDVH-a1gDjw-5uT2xD-4TEV4j-6RJLr2-oMnMx-291EB-6nuyEh-8CRxWW-2WpyUt-ff1ceM-48sAfq-cHbXsb-2j79ir-26RFXL-JhogD-oRMBxJ-Kn6SC-8BZKzE-oMXFEc-qdKZxj-6VuHPV-4DPcJ-34Ydj3-74Ai6o-phpcgU-8i7aD3-4ixPCv-eFdBBk-2PCb6c-jTKiQ8-6RFQNa-eWRq66-okc6aj-6RrRiK-83hSY8-4gGbQD-ag6zbJ-cxpCU7-QXnz9-o5swtw>

A Figura 2.3 foi criada a partir da foto: Fern_20090207_1.jpg - by Carolyn Jewel. Tirada em 7 de fevereiro de 2009. No FLICKR:

<https://www.flickr.com/photos/cjewel/3261398909/in/photolist-7zGXJA-n7zp74-djnLCY>

-syidBJ-3zgaou-5rNWJd-9D9sEp-qxNzsj-5YcwgF-nPAoEK-aF4LAI-v9729S-f5cG7h
-9NirnA-ocacow-ocae4e-5p53yB-mbf9Kn-qog5Zq-otrTAb-9WhzQu-4Vwaiy-4ZFrJn
-k8YCB-37p3jn-4SxXsd-djwnJ9-4WN5ve-fwmjNX-7PcmqF-c3uCtE-7sM63D-5bFcAY
-81jWYt-fTTda2-f4dLGJ-sbCGGN-8xyQMH-9K3wB5-awkYiW-8nkWRb-dLnDQ8-5nZ98J
-4JTK6w-jH5pZ9-8qfqtU-8PehK2-idcQ1q-6DdC2g-ZHvr1

A Figura 2.5 IndusRiverDelta, Pakistan - de propriedade da NASA | Wikimedia Commons. Tirada em 28 de setembro de 2010. No FLICKR:

<https://www.flickr.com/photos/48722974@N07/5034339038/in/photolist-8ESiAW-qpMnco-qg1tu5-qfDgmF-62Kk2-5d2uQj-eVpXG8-5m1BKJ-62PB5Y-nTLT1E-jxaaEY-oqxCB4-5m1Wt3-5xRTVb-8XHGft-8L4AgP-7GK1FF-4G5xqi-eQG7jz-pAjBfi-9BLm5D-i66z4e-rcviSD-bz7jEf-9BPeJY-7GNQQq-4NqkTk-cCg7QC-qfwstJ-4NUNZu-8L7EEA-cR9Lkd-f4hqop-fkFwFq-der1df-7GNVVY-7GJVER-7GNP1b-7GNM6d-oQQ81R-7GJVb4-7GK1gT-7GNNc7-7GNSeQ-5kWEQK-7GJZmZ-rtWzNX-7GJY1F-7GJStK-rcuN6p>

Demais figuras por Márcio Rostirolla Adames.

Criação na UTFPR, em Curitiba, 2016.

